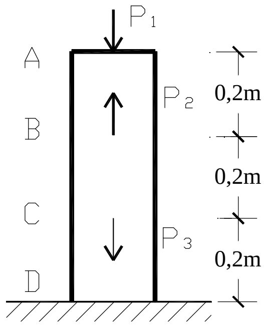
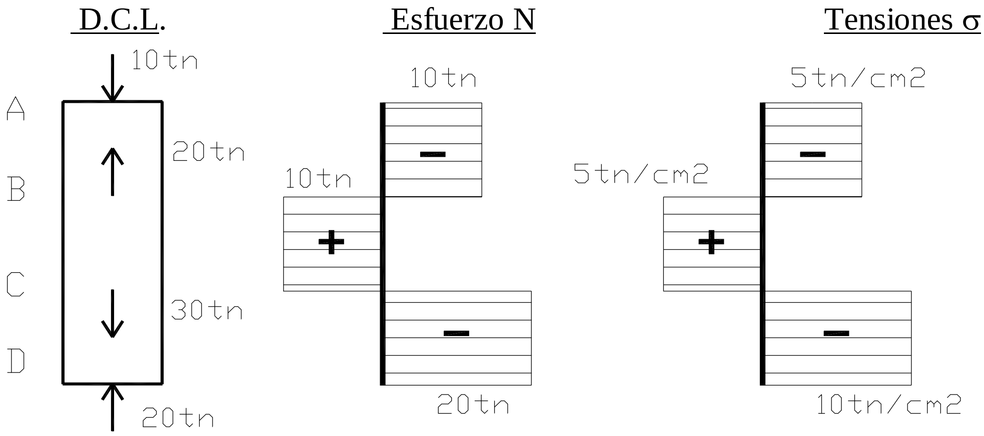
T.P. Nº 2.1:

Para el siguiente sistema se pide:
a) Determinar el diagrama de tensiones normales.
b) Calcular la variación de longitud absoluta de la barra. (δ)
c) Determinar la energía de deformación del sistema.

Datos:
$P_1 = 10\ \text{tn}$
$P_2 = 20\ \text{tn}$
$P_3 = 30\ \text{tn}$
$E = 2000\ \text{tn}/\text{cm}^2$
$\Omega = 2\ \text{cm}^2$



a) Diagrama de tensiones normales (σ)
Por tratarse de un sistema isostático, haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio se determina las reacciones del sistema.
Así, es posible obtener el diagrama de esfuerzos normales (N).
Y para determinar el diagrama de tensiones normales (σ), se calculará la misma en cada sección significativa del sistema (es decir, secciones en que cambien los valores de N o las dimensiones de sección Ω).



$$\sigma_{AB} = \frac{10\ \text{tn}}{2\ \text{cm}^2} = 5\ \text{tn}/\text{cm}^2\ (-)$$
$$\sigma_{BC} = \frac{10\ \text{tn}}{2\ \text{cm}^2} = 5\ \text{tn}/\text{cm}^2\ (+)$$
$$\sigma_{CD} = \frac{20\ \text{tn}}{2\ \text{cm}^2} = 10\ \text{tn}/\text{cm}^2\ (-)$$

Recordemos que $\sigma = \dfrac{N}{\Omega}$

Donde :

N = esfuerzo normal en la sección
Ω = área de la sección transversal de la pieza

b) Determinación del alargamiento (δ) de la barra
Considerando que el material tiene un comportamiento elástico lineal, podemos aplicar la ley de Hooke ($\sigma = \varepsilon \times E$) para determinar la deformación especifica o unitaria (ε), y a partir de ella obtener el alargamiento (δ) de la pieza.

$$\delta = \varepsilon \times L$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \rightarrow \delta = \frac{\sigma \times L}{E}$$

La variación de longitud absoluta (δ) de la barra, la determinaremos como la suma de las deformaciones absolutas (δ) de cada tramo de la barra.

$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD}$$

$$\delta_{AB} = \frac{5\ tn/cm^2 \times 20\ cm}{2000\ tn/cm^2} = -0{,}05\ cm\ (acortamiento)$$

$$\delta_{BC} = \frac{5\ tn/cm^2 \times 20\ cm}{2000\ tn/cm^2} = +0{,}05\ cm\ (alargamiento)$$

$$\delta_{CD} = \frac{10\ tn/cm^2 \times 20\ cm}{2000\ tn/cm^2} = -0{,}10\ cm\ \ (acortamiento)$$

Luego:

$$\delta = -0{,}05\ cm + 0{,}05\ cm - 0{,}10\ cm = -0{,}10\ cm$$

$$\rightarrow \boxed{\delta = -0{,}10\ \ cm.}\quad \text{Representa un acortamiento de la barra}$$

c) <u>Energía de deformación del sistema</u>

A causa del trabajo realizado por las cargas exteriores W, en el cuerpo se acumula una energía potencial de deformación U. Si las cargas se aplican estáticamente, podemos decir que W = U

$$\text{Siendo } W = \int_0^P P \times d\delta = \frac{P \times \delta}{2}$$

$$\text{Resulta: } U = \frac{1}{2} \times P \times \delta = \frac{1}{2} \times \frac{\Omega \times E}{L} \times \delta^2 = \frac{1}{2} \times \frac{L}{\Omega \times E} \times P^2$$

$$\text{Siendo: } \delta = \frac{\sigma \times L}{E} \text{ podemos escribir que: } U = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma^2 \times \Omega \times L}{E}$$

Como en los casos anteriores, calcularemos U como la suma de las energías internas de los tramos con diferentes valores de σ, Ω, L.

$$U = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD}$$

$$U_{AB} = \frac{(-5\ tn/cm^2)^2 \times 2\ cm^2 \ \times 20\ cm}{2 \times 2000\ tn/cm^2} = 0{,}25\ tncm$$

$$U_{BC} = \frac{(+5\ tn/cm^2)^2 \times 2\ cm^2 \ \times 20\ cm}{2 \times 2000\ tn/cm^2} = 0{,}25\ tncm$$

$$U_{CD} = \frac{(-10\ tn/cm^2)^2 \times 2\ cm^2 \ \times 20\ cm}{2 \times 2000\ tn/cm^2} = 1{,}00\ tncm$$

U = 0,25 tncm + 0,25 tncm + 1 tncm = 1,5 tncm

$\rightarrow \boxed{U = 1{,}5 tncm}$ Representa la energía potencial de deformación del sistema

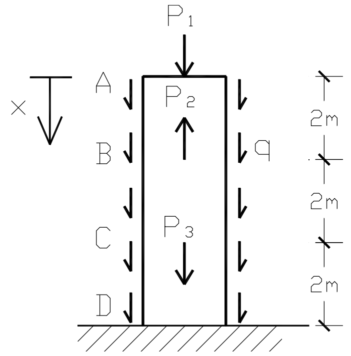
Como puede observarse todos los términos resultan positivos (+), porque lo que interesa es sí se deforma o no un sistema, y no el signo de su deformación (es decir sí es alargamiento o acortamiento).

T.P.N^0 2.2:

Determinar el diagrama de esfuerzos normales y la variación de longitud absoluta (δ) de la barra.
Determinar la energía de deformación del sistema.

Datos:

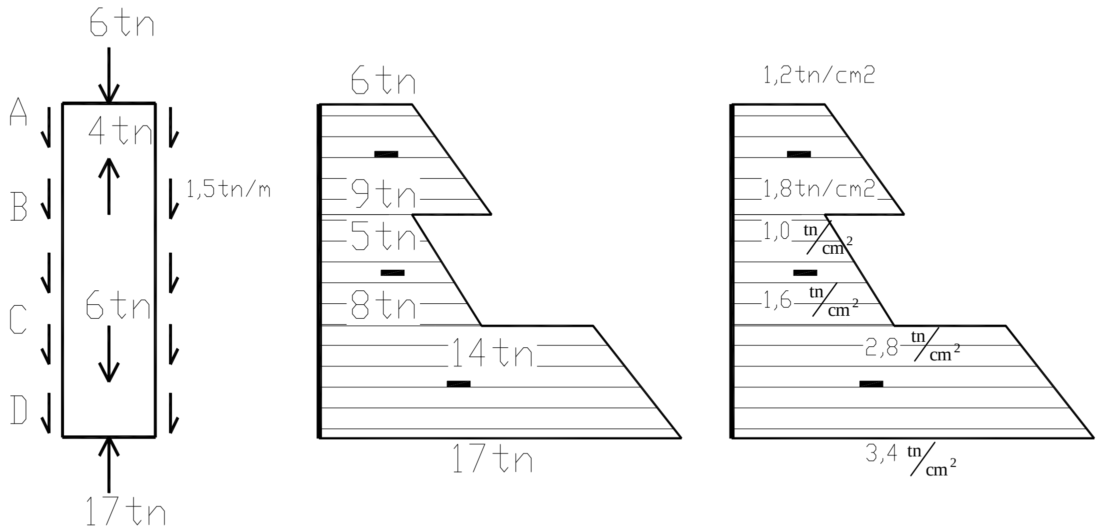
$P_1 = P_3 = 6$ tn
$P_2 = 4$ tn
$q = 1{,}5$ tn/m
$E = 2000$ tn/cm^2
$\Omega = 5$ cm^2



a) Diagrama de esfuerzos normales

Valen las mismas consideraciones realizadas para el T.P.2.1. Cabe aclarar que ***q*** es una carga normal uniformemente distribuida.

D.C.L. — Esfuerzo N — Tensiones σ



En este caso, el esfuerzo normal presenta una variación lineal en cada tramo, a causa de la carga normal ***q*** uniformemente distribuida.

Determinaremos las ecuaciones genéricas del esfuerzo normal en cada tramo.

(Tramo AB) $\underline{0 \le x < 2\text{m}}$

$$N(x) = 6\text{ tn} + q \times x \begin{cases} p/x = 0 \rightarrow N_A = 6\text{ tn} \\ p/x = 0 \rightarrow N_B^S = 9\text{ tn} \end{cases}$$

(tramo BC) $\underline{2 \le x < 4\text{m}}$

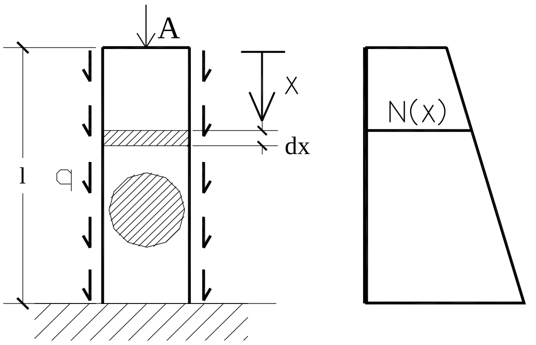
$$N(x) = 6\text{ tn} - 4\text{ tn} + q \times x \begin{cases} p/x = 2 \rightarrow N_B^I = 5\text{ tn} \\ p/x = 4 \rightarrow N_C^S = 8\text{ tn} \end{cases}$$

(Tramo CD) $\underline{4 \le x < 6\text{m}}$

$$N(x) = 6\text{ tn} - 4\text{ tn} + 6\text{ tn} + q \times x \begin{cases} p/x = 4 \rightarrow N_C^I = 14\text{ tn} \\ p/x = 6 \rightarrow N_D = 17\text{ tn} \end{cases}$$

b) <u>Variación de la longitud de la barra (δ)</u>

Teniendo en cuenta las consideraciones de T.P.2.1, planteamos en forma genérica la ecuación de la variación de longitud (δ) para una barra con esfuerzo normal variable.



Para un elemento de longitud dx, ubicado a una distancia x (medido desde A), la deformación del elemento diferencial resulta:

$d\delta = \dfrac{N(x) \times dx}{E \times \Omega}$ y la deformación total de la barra será: $\delta = \int_0^l d\delta$

$\delta = \int_0^l \dfrac{N(x) \times dx}{E \times \Omega}$ Para E = cte; Ω = cte en toda la barra.

Aplicando esta ecuación para cada tramo de la barra:

$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD}$

$$\delta_{AB} = \frac{1}{E \times \Omega} \int_0^2 -(6 + 1{,}5\,x)\,dx = \frac{1}{E \times \Omega}\left[6\,x + \frac{1{,}5\,x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{-15\text{ tm}}{E \times \Omega} \quad \text{(acortamiento)}$$

$$\delta_{BC} = \frac{1}{E \times \Omega} \int_2^4 -(2 + 1{,}5\,x)\,dx = \frac{1}{E \times \Omega}\left[2\,x + \frac{1{,}5\,x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{-13\text{ tm}}{E \times \Omega} \quad \text{(acortamiento)}$$

$$\delta_{CD} = \frac{1}{E \times \Omega} \int_4^6 -(8 + 1{,}5\,x)\,dx = \frac{1}{E \times \Omega}\left[8\,x + \frac{1{,}5\,x^2}{2}\right]_4^6 = \frac{-31\text{ tm}}{E \times \Omega} \quad \text{(acortamiento)}$$

Luego:

$$\delta = \frac{-15\text{ tm}}{E \times \Omega} - \frac{13\text{ tm}}{E \times \Omega} - \frac{31\text{ tm}}{E \times \Omega} = \frac{-59\text{ tm}}{E \times \Omega}$$

$$\delta = \frac{-59\text{ tm} \times (100\text{ cm/m})}{2000\text{ tn/cm}^2 \times 5\text{ cm}^2} = -0{,}59\text{ cm}$$

$\boxed{\rightarrow \delta = -0{,}59\text{ cm}}$ Representa un acortamiento para la barra.

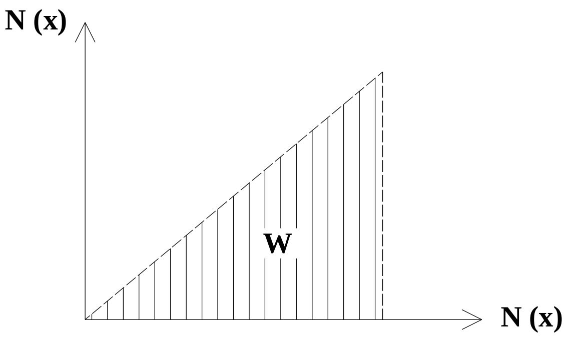
c) <u>Energía de deformación</u>

Teniendo en cuenta las consideraciones del T.P.2.1, planteamos en forma genérica la ecuación de la energía de deformación interna U, para una barra con esfuerzo normal variable:

$$U = \int_0^{\delta} N(x) \times d\delta \qquad \text{con} \qquad d\delta = \frac{N(x) \times dx}{E \times \Omega}$$

y para una relación lineal N(x)-δ, resulta:

$$U = \int_0^{l} \frac{N(x)^2}{2 \times E \times \Omega}\, dx$$



Aplicando esta ecuación a cada tramo de la barra:

$U = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD}$

$$U_{AB} = \frac{1}{2\,E \times \Omega} \int_0^2 (6 + 1{,}5\,x)^2\, dx = \frac{1}{2\,E \times \Omega} \int_0^2 (6^2 + 2 \times 6 \times 1{,}5\,x + 1{,}5^2\, x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\,E \times \Omega} \left[36\,x + 18 \frac{x^2}{2} + 2{,}25 \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{114\ tn^2 m}{2\,E \times \Omega}$$

$$U_{BC} = \frac{1}{2\,E \times \Omega} \int_2^4 (2 + 1{,}5\,x)^2\, dx = \frac{1}{2\,E \times \Omega} \int_2^4 (2^2 + 2 \times 2 \times 1{,}5\,x + 1{,}5^2\, x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\,E \times \Omega} \left[4\,x + 6 \frac{x^2}{2} + 2{,}25 \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{89\ tn^2 m}{2\,E \times \Omega}$$

$$U_{CD} = \frac{1}{2\,E \times \Omega} \int_4^6 (8 + 1{,}5\,x)^2\, dx = \frac{1}{2\,E \times \Omega} \int_4^6 (8^2 + 2 \times 8 \times 1{,}5^2\, x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\,E \times \Omega} \left[64\,x + 24 \frac{x^2}{2} + 2{,}25 \frac{x^3}{3} \right]_4^6 = \frac{518\ tn^2 m}{2\,E \times \Omega}$$

Luego:

$$U = \frac{1}{2\,E \times \Omega} \times (114 + 89 + 518)\ tn^2 m = \frac{721\ tn^2 m}{2\,E \times \Omega}$$

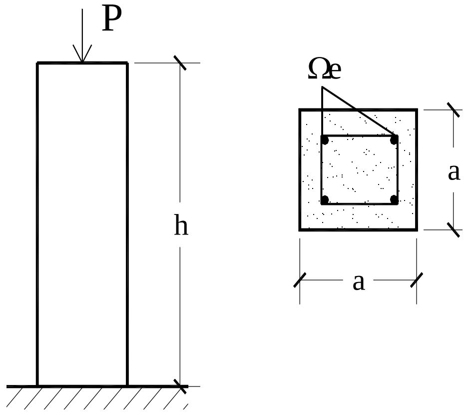
$$U = \frac{721\ tn^2 m \times 100\ cm/m}{2 \times 2000\ tn/cm^2 \times 5\ cm^2} = 3{,}605\ tncm \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = 3{,}605\ tncm}$$

TP N^0 2.3:

Dimensionar la siguiente columna de H^0 A^0 para que cumpla con las siguientes condiciones:

a) $\sigma_b \leq \sigma_{b\,adm}$, en el hormigón

b) $\sigma_e \leq \sigma_{e\,adm}$, en el acero



Datos:

h = pequeño

P = 80 tn

$\sigma_{e\,adm} = 1400\ kg/cm^2$

$E_e = 2{,}1 \times 10^6\ kg/cm^2$

$\sigma_{b\,adm} = 70\ kg/cm^2$

$E_b = 0{,}21 \times 10^6\ kg/cm^2$

$\mu = \dfrac{\Omega_e}{\Omega_b} = 0{,}015 = 15\,\%$ (cuantía de acero)

1 - Ecuaciones de equilibrio

La carga P debe ser absorbida en parte por el acero (P_e) y en parte por el hormigón(P_b) tal que:

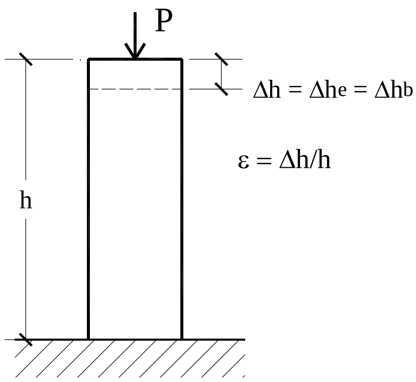
$P = P_b + P_e$ Siendo: $\sigma_e = \dfrac{P_e}{\Omega_e}; \sigma_b = \dfrac{P_b}{\Omega_b} \rightarrow P_e = \sigma_e \times \Omega_e; P_b = \sigma_b \times \Omega_b$

$$\boxed{P = \sigma_b \times \Omega_b + \sigma_e \times \Omega_e \qquad (1)}$$

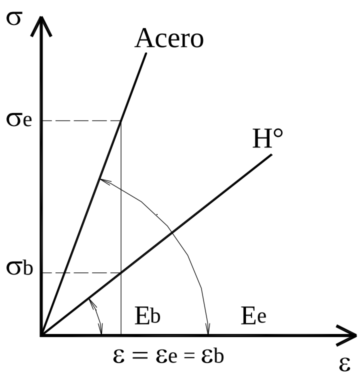
Esta ecuación es válida si ambos materiales trabajan simultáneamente dentro del campo elástico y se verifica que $\sigma_b \leq \sigma_{adm}; \sigma_e \leq \sigma_{adm}$

2 - Ecuación de deformación

Aunque la pieza esta compuesta de un material heterogéneo (H^0 y acero), se comporta como una pieza única, y la deformación que sufre la pieza debido al esfuerzo P, será la misma en el acero y en el hormigón.



Entonces las deformaciones especificas serán iguales en ambos materiales: $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_b = \varepsilon_b \ \ (2)}$



Observando la representación de la curva σ–ε de cada material dentro del campo elástico lineal, para una misma deformación especifica ε en ambos materiales ($\varepsilon_e = \varepsilon_b$), el acero es capaz de absorber una tensión (σ_e) mayor que la tensión que puede absorber el H^0 (σ_b), es decir se tiene que ($\sigma_e > \sigma_b$), y ello se debe a la propiedad de los materiales a través de su módulo de elasticidad ($E_e > E_b$).

Dentro del campo elástico lineal, aplicando la ley de Hooke, se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \rightarrow \varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E_e}\,;\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b}$$

Resultando: $\boxed{\frac{\sigma_e}{E_e} = \frac{\sigma_b}{E_b} \quad (3)}$

De donde se obtiene que $\begin{cases} \sigma_e = \dfrac{E_e}{E_b} \times \sigma_b \\ \sigma_b = \dfrac{E_b}{E_E} \times \sigma_e \end{cases}$ ó

<u>3- Dimensionamiento</u>

Para el dimensionamiento de la pieza debe verificarse simultáneamente que:

$\sigma_e \leq \sigma_{e\,adm}$ y $\sigma_b \leq \sigma_{b\,adm}$

a) <u>Analizando para</u> $\sigma_b \leq \sigma_{b\,adm}$

$$P = \sigma_b \times \Omega_b + \sigma_e \times \Omega_e \qquad \text{con}: \sigma_e = \frac{E_e}{E_b} \times \sigma_b$$

$$\rightarrow P = \sigma_b \times \Omega_b \left(1 + \frac{E_e}{E_b} \times \frac{\Omega_e}{\Omega_b}\right)$$

llamando : $\dfrac{E_e}{E_b} = n\,;\ \dfrac{\Omega_e}{\Omega_b} = \mu$ $\left| \begin{array}{l} n = \dfrac{E_e}{E_b} = 10 \\ \mu = \dfrac{\Omega_e}{\Omega_b} = 0{,}015 \end{array} \right.$

$$\rightarrow \boxed{P = \sigma_b \times \Omega_b \times (1 + n \times \mu) \qquad (4)}$$

Haciendo $\sigma_b \leq \sigma_{b.adm}$ podemos determinar la máxima carga P que puede aplicarse a la pieza para que no se superen las tensiones admisibles en el H^0.

$$\rightarrow P_{max1} \leq \sigma_{b.adm} \times \Omega_b (1 + n \times \mu) \qquad \text{con}:\ \Omega_b = a^2$$

$$\rightarrow \boxed{P_{max1} \leq 70\frac{Kg}{cm^2} \times a^2 (1 + 10 \times 0{,}015) = 80{,}5\,.\,a^2 \left(\frac{Kg}{cm^2}\right) \qquad (5)}$$

b) <u>Analizando para</u> $\sigma_e \leq \sigma_{e\,adm}$

$$P = \sigma_b \times \Omega_b + \sigma_e \times \Omega_e \qquad \text{con}: \sigma_b = \frac{E_b}{E_e} \times \sigma_e$$

$$\rightarrow P = \sigma_e \times \frac{E_b}{E_e} \times \Omega_b + \sigma_e \times \Omega_e$$

$$\rightarrow \boxed{P = \sigma_e \times \Omega_e \left(1 + \frac{1}{n \times \mu}\right) \qquad (6)}$$

Con $\sigma_e \leq \sigma_{e\,adm}$, podemos determinar la máxima carga P que puede aplicarse a la pieza para que no se superen las tensiones admisibles en el acero.

$$\rightarrow\ P_{max\,2} \leq \sigma_{e\,adm} \times \Omega_e \left(1+\frac{1}{n\times\mu}\right) \qquad \text{con}: \ \Omega_e = \mu\times\Omega_b = \mu\times a^2$$

$$\rightarrow \boxed{P_{max\,2} \leq 1400\,\frac{Kg}{cm^2}\times(0{,}015\,a^2)\left(1+\frac{1}{10\times 0{,}015}\right) = 161\,a^2\left(\frac{Kg}{cm^2}\right) \quad (7)}$$

c) Para que no se superen las tensiones admisibles en el acero y en H^0, simultáneamente, debe adoptarse la menor carga P_{max} (que satisface la condición a y b simultáneamente).

Adopto: $\boxed{P_{máx} = 80{,}5\ a^2\ (kg/cm^2)}$

Luego:

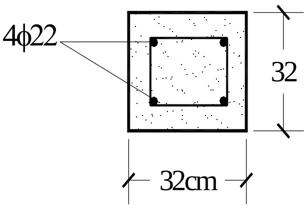
$$80{,}5\,a^2\ kg/cm^2 = P \rightarrow a = \sqrt{\frac{P}{80{,}5\,kg/cm^2}}$$

$$\rightarrow a = \sqrt{\frac{80000\,Kg}{80{,}5\,kg/cm^2}} = \sqrt{993{,}79\,cm^2} = 31{,}52\,cm \qquad \text{Adopto}: a = 32\,cm$$

Luego:

$$\Omega_b = a^2 = 1024cm^2$$

$$\Omega_e = \mu\times\Omega_b = 0{,}015\times 1024\,cm^2 = 15{,}36\,cm^2$$



$$\rightarrow \Omega_e = 4\times\left(\frac{\pi\times\phi_e^{\,2}}{4}\right) \leq 15{,}36\,cm^2$$

$$\rightarrow \phi_e = \sqrt{\frac{15{,}36\,cm^2}{\pi}} = 2{,}21\,cm \qquad \text{Adopto}: 4\,\phi 22\ mm$$

Luego la carga que absorbe cada material será:

De (4) $$\rightarrow P_b = \frac{P}{(1+n\times\mu)} \quad \text{con} \quad \sigma_b\times\Omega_b = P_b$$

$$\rightarrow P_b = \frac{80000Kg}{(1+0{,}015\times 10)} = 69565\ Kg$$

$$\rightarrow \sigma_b = \frac{P_b}{\Omega_b} = \frac{69565Kg}{(32\times 32)\,cm^2} = 67{,}9\,\frac{Kg}{cm^2} \leq \sigma_{b.adm}\ (B.C)$$

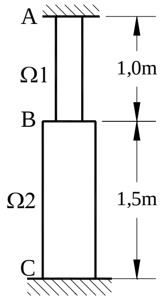
De (6) $$\rightarrow P_e = \frac{P}{\left(1+\frac{1}{n\times\mu}\right)} \quad \text{con} \ \sigma_e\times\Omega_e = P_e$$

$$\rightarrow P_e = \frac{80000\ Kg}{\left(1+\frac{1}{10\times 0{,}015}\right)} = 10435\,Kg$$

$$\rightarrow \sigma_e = \frac{P_e}{\Omega_e} = \frac{10435Kg}{4\times\frac{\pi\times(2{,}2cm)^2}{4}} = 686{,}3\,\frac{Kg}{cm^2} \leq \sigma_{e.adm} \qquad (B.C)$$

<u>T.P N^0 2.4:</u>
Determinar las tensiones que se generan en cada una de las barras cuando se produce una disminución de temperatura $\Delta T^{\,0}$.

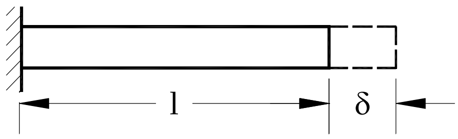
<u>Datos:</u>
$\Delta T = -30°\ C$
$\Omega_1 = 3\ cm^2$; $\Omega_2 = 4\ cm^2$
$E_1 = 2{,}1 \times 10^3\ tn/cm^2$; $E_1 = 2{,}5 \times 10^2\ tn/cm^2$
$\alpha_1 = 12 \times 10^{-6}\ 1/°C$; $\alpha_2 = 11 \times 10^{-6}\ 1/°C$



<u>Consideraciones sobre el efecto de la temperatura</u>
Cuando una pieza se encuentra sometida a un cambio de temperatura $\Delta T^{\,0}$, y siempre que pueda deformarse libremente (estructura estáticamente determinada) el alargamiento o acortamiento debido a $\Delta T^{\,0}$, será:

$\delta = \varepsilon.l \quad \text{con} : \varepsilon = \alpha.\Delta T$

$\rightarrow \delta = \alpha.\Delta T.l$



y no se producen esfuerzos en la estructura.
Sin embargo, si la pieza sometida a un ΔT no pude deformarse libremente (estructura estáticamente indeterminada) se producirán esfuerzos internos denominados esfuerzos térmicos.
En este ultimo caso, una disminución de la temperatura, genera esfuerzos de tracción en la pieza, y por el contrario un aumento de temperatura genera esfuerzos de compresión.

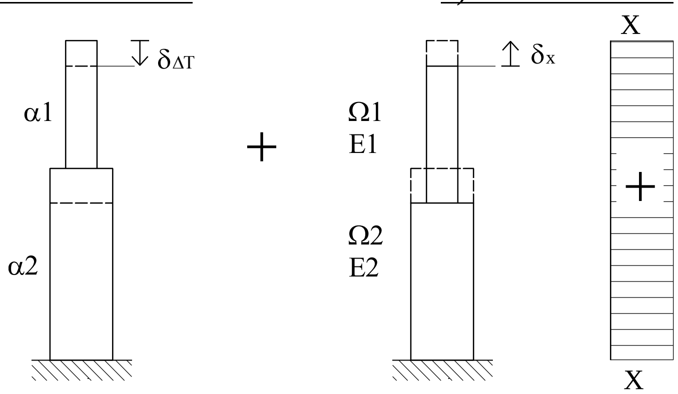
1 - <u>Planteo del problema</u>
La disminución de la temperatura, tiende a contraer la estructura; como esta se encuentra empotrada en ambos extremos, se generarán esfuerzos de tracción que tenderán a contrarrestar el efecto de la temperatura.
Así, la deformación sufrida por temperatura $\delta^{\Delta T} = \alpha \times \Delta T \times l$ será contrarrestada por la deformación sufrida por el esfuerzo generado $\boxed{\delta^{X} = \dfrac{x \times l}{\Omega \times E}}$ de modo tal que:

$\boxed{\delta^{\Delta T} = \delta^{x} \quad \text{o bien} : \delta^{\Delta T} + \delta^{x} = 0}$

Para resolver el problema, liberaremos uno de los extremos y permitiremos que la estructura se deforme libremente, así obtendremos $\delta^{\Delta T}$.
Posteriormente, pondremos de manifiesto los esfuerzos generados por la deformación restringida (x), y determinaremos δ^{x}.
Como el extremo liberado, no puede tener desplazamientos (por tratarse de un empotramiento) concluimos que:

$\boxed{\delta^{\Delta T} + \delta^{x} = 0}$ *<u>Ec. de deformación.</u>*

<u>a)Estado debido ΔT</u> <u>b)Estado debido x</u>



$$\delta^{\Delta T} = \delta_1^{\Delta T} + \delta_2^{\Delta T} = \alpha_1 \times \Delta T \times l_1 + \alpha_2 \times \Delta T \times l_2 = \Delta T\left(\alpha_1 \times l_1 + \alpha_2 \times l_2\right)$$

$$\delta^{x} = \delta_1^{x} + \delta_2^{x} = \frac{x \times l_1}{\Omega_1 \times E_1} + \frac{x \times l_2}{\Omega_2 \times E_2} = x\left(\frac{l_1}{E_1 \times \Omega_1} + \frac{l_2}{E_2 \times \Omega_2}\right)$$

Luego:

$$\delta^{\Delta T} + \delta^{x} = 0 \rightarrow \Delta T\left(\alpha_1 \times l_1 + \alpha_2 \times l_2\right) + x\left(\frac{l_1}{E_1 \times \Omega_1} + \frac{l_2}{E_2 \times \Omega_2}\right) = 0$$

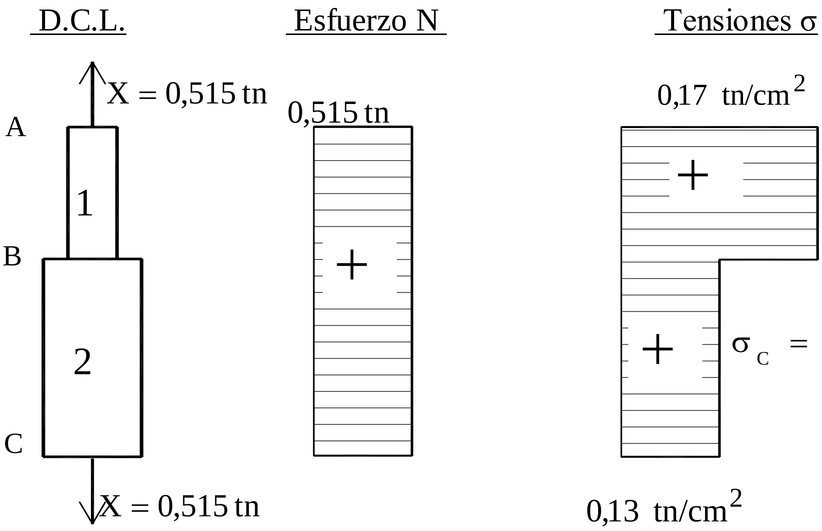
$$\rightarrow x = -\frac{\Delta T\left(\alpha_1 \times l_1 + \alpha_2 \times l_2\right)}{\left(l_1/E_1 \times \Omega_1 + l_2/E_2 \times \Omega_2\right)}$$

Reemplazando valores:

$$\rightarrow x = -\frac{(-30°C)\times\left(12 \times 10^{-6}\ °C^{-1} \times 100\ cm + 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1} \times 150\ cm\right)}{\left(\dfrac{100\ cm}{2{,}1 \times 10^{3}\ tn/cm^{2} \times 3cm^{2}} + \dfrac{150\ cm}{2{,}5 \times 10^{2}\ tn/cm^{2} \times 4cm^{2}}\right)} = 0.515tn \rightarrow \boxed{x = 0{,}515\ tn}$$

x: Esfuerzo generado por la variación de temperatura

2 - Diagrama de solicitaciones y tensiones



$$\sigma_A = \frac{0{,}515\ tn}{3\ cm^{2}} = 0{,}17\ tn/cm^{2}$$

$$\sigma_C = \frac{N}{\Omega} = \frac{0{,}515\ tn}{4\ cm^{2}} = 0{,}13\ tn/cm^{2}$$

3 - Energía de deformación del sistema

Hemos visto de los ejercicios anteriores que:

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma^{2} \times l \times \Omega}{E} = \frac{N^{2} \times l}{2E \times \Omega}$$

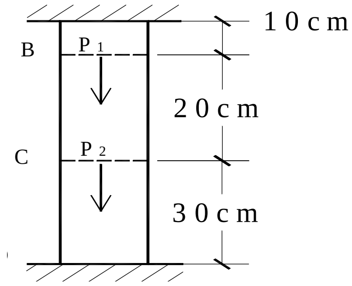
$$U = U_1 + U_2 = \frac{N^{2} \times l_1}{2E_1 \times \Omega_1} + \frac{N^{2} \times l_2}{2E_2 \times \Omega_2}$$

$$U = \frac{(0{,}515\ tn)^{2} \times 100\ cm}{2 \times 2100\ \frac{tn}{cm^{2}} \times 3\ cm^{2}} + \frac{(0{,}515\ tn)^{2} \times 150\ cm}{2 \times 250\ \frac{tn}{cm^{2}} \times 4\ cm^{2}}$$

$$\boxed{U = 0{,}022\ tncm = 22\ Kgcm}$$

T.P. N^0 2.5:

Determinar los diagramas de esfuerzos normales para la siguiente estructura hiperestática.



Datos:

$P_1 = 1361\,Kg$

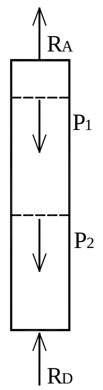
$P_2 = 2722\,Kg$

$E \times \Omega = cte.$

1 - Ecuaciones de equilibrio

La estructura está constituida por una barra empotrada en sus dos extremos y cargada axialmente por las cargas P_1 y P_2. Como consecuencia se desarrollan reacciones R_A y R_D en los extremos de la barra, que no puede determinarse estáticamente, ya que solo existe una ecuación independiente de equilibrio estático:

D.C.L.



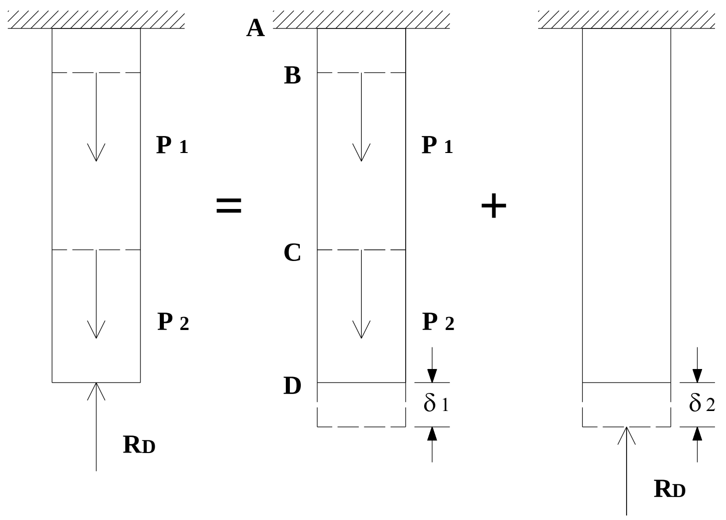
$$\sum F_V = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 + P_2 - R_A - R_D = 0} \qquad (1)$$

Es un sistema hiperestático de 1er grado respecto al esfuerzo normal, pues se tiene una ecuación con dos incógnitas.
Entonces debe establecerse una segunda ecuación que tenga en cuenta las deformaciones de la barra.

2 - Ecuación de deformación

El procedimiento de resolución consiste en convertir el sistema hiperestático en un sistema isostático eliminando los vínculos superabundantes (en este caso como es hiperestático de 1er orden solo se requiere eliminar un apoyo) y se considera dos estados de carga sobre el sistema isostático.
Estado 1: Se carga el sistema isostático con las cargas exteriores y se obtiene la deformación del mismo en correspondencia con el vínculo eliminado (δ_1).
Estado 2: Sea el sistema isostático con la reacción hiperestática que corresponde al apoyo eliminado, y se determina la deformación del sistema en correspondencia con el vínculo eliminado (δ_2).
Por ejemplo, eliminaremos el apoyo inferior (D), de modo que el sistema isostático elemental resulta:



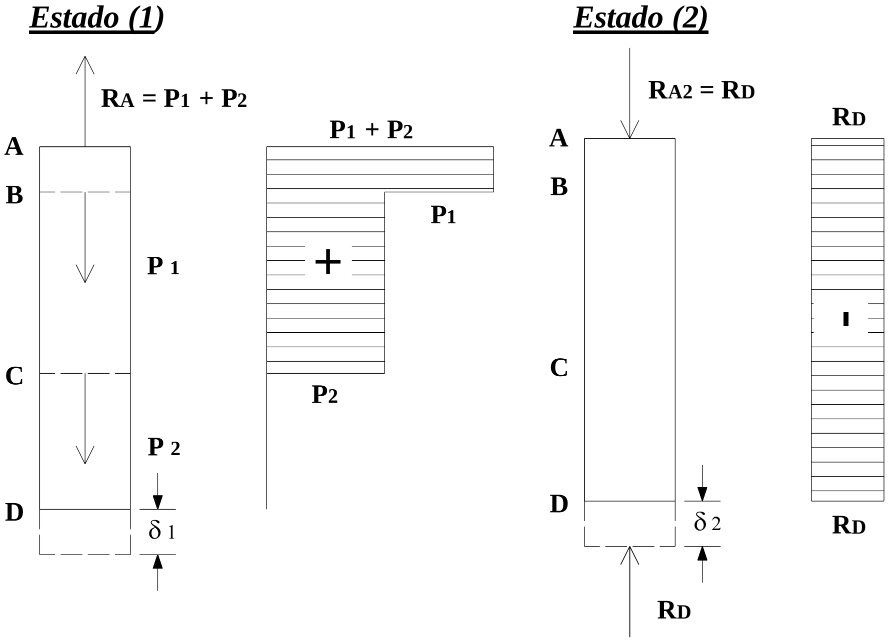
Isostático Fundamental Estado (1) Estado (2)

Así, se plantea una ecuación de deformación en correspondencia con el vínculo eliminado.
En este caso se eliminó el vínculo que absorbían las reacciones verticales en D, así que se planteará una ecuación de deformación que indique que los desplazamientos verticales en la sección D son nulos (δ_D=0) pues el sistema original no los permite.

Entonces: $\boxed{\delta_D = \delta_1 + \delta_2 = 0 \quad (2)}$

3 - Resolución del sistema

Para determinar los desplazamientos de la barra en la sección, para los estados 1 y 2 de carga usaremos la ley de Hooke: $\delta = \dfrac{N \times l}{E \times \Omega}$



Estado (1)

$$\delta_1 = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD}$$

$$\text{con } \delta_{AB} = \frac{(P_1 + P_2) \times l_{AB}}{E \times \Omega} = \frac{(1361 + 2722)\,Kg \times 10\,cm}{E \times \Omega} = \frac{40830\,Kgcm}{E \times \Omega}$$

$$\delta_{BC} = \frac{P_2 \times l_{BC}}{E \times \Omega} = \frac{2722\,Kg \times 20\,cm}{E \times \Omega} = \frac{54440\,Kgcm}{E \times \Omega}$$

$\delta_{CD} = 0$ Este tramo no tiene deformaciones pues no tiene esfuerzos normales.

$$\delta_1 = \frac{40830\,Kgcm}{E \times \Omega} + \frac{54440\,Kgcm}{E \times \Omega} + 0 = \frac{95230\,Kgcm}{E \times \Omega}$$

Estado (2)

$$\delta_2 = \frac{R_D \times l_{AD}}{E \times \Omega} = \frac{R_D \times 60\,cm}{E \times \Omega}$$

Donde R_D es una de las incógnitas.

Consideramos (+) los desplazamientos hacia abajo y (-) los desplazamientos hacia arriba.

De la ecuación (2): $\delta_1 + \delta_2 = 0$

$$\rightarrow \frac{95230\ \text{Kgcm}}{E \times \Omega} = \frac{R_D \times 60\ \text{cm}}{E \times \Omega}$$

$$\rightarrow R_D = \frac{95230\ \text{Kgcm}}{60\ \text{cm}} = 1587\ \text{Kg}$$ (Valor de una de las incógnitas)

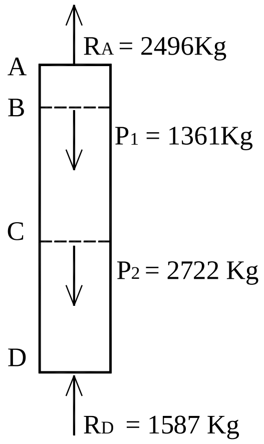
De la ecuación (1): $R_A = P_1 + P_2 - R_D$

$$\rightarrow R_A = 1361\ \text{Kg} + 2722\ \text{Kg} - 1587\ \text{Kg} = 2496\ \text{Kg}$$ (valor de la segunda incógnita)

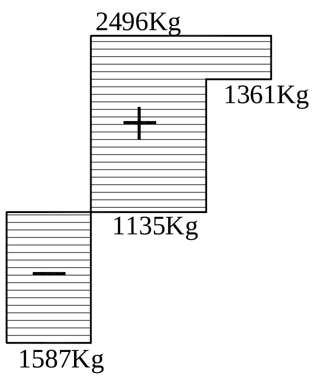
4 - Diagrama de solicitaciones

Una vez conocido los valores de las incógnitas, podemos determinar los diagramas de esfuerzos normales(N).

D.C.L.



Esfuerzo N



5 - Energía de deformación del sistema

Hemos visto de ejercicios anteriores que:

$$U = \frac{N^2 \times l}{2\,E \times \Omega}$$

$$U = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD}$$

$$U = \frac{(2496\ \text{Kg})^2 \times 10\ \text{cm}}{2\,E \times \Omega} + \frac{(1135\ \text{Kg})^2 \times 20\ \text{cm}}{2\,E \times \Omega} + \frac{(-1587\ \text{Kg})^2 \times 30\ \text{cm}}{2\,E \times \Omega}$$

$$U = \frac{81.810.865}{E \times \Omega}\ \text{Kg}^2\text{cm}$$

TP N^0 2.6:

Calcular las tensiones normales en las barras del siguiente sistema hiperestático luego de superarse el error de montaje Δ.

En un gráfico representar la relación P-δ_A.

Datos:

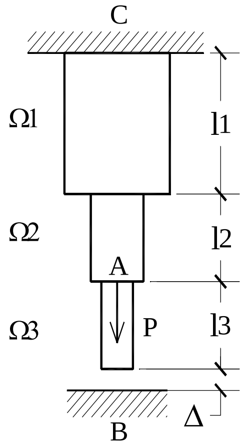
$P = 16$ tn; $\Delta = 0{,}8$ cm

$E = 10^5$ kg/cm^2 = 100 tn/cm^2

$\Omega_1 = 40$ cm^2; $l_1 = 160$ cm

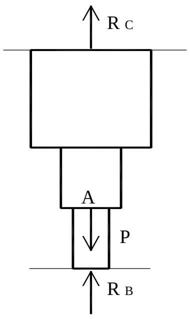
$\Omega_2 = 35$ cm^2; $l_2 = 70$ cm

$\Omega_3 = 20$ cm^2; $l_3 = 60$ cm



1 - Resolución del sistema hiperestático

1.1 - Ecuación de equilibrio



Cuando se supere el error de montaje Δ por acción de la fuerza P que actúa en el sistema se generará una reacción en B. De modo que el D.C.L resultará:

$$\sum F_V = 0$$

$$\rightarrow R_C + R_B - P = 0 \qquad (1)$$

Como puede observarse, el sistema es hiperestático de 1er grado respecto a los esfuerzos normales. Entonces será necesario plantear una ecuación de deformación.

1.2- Procedimiento de resolución

Recordemos, que el proceso de resolución consiste en convertir el sistema hiperestático en otro isostático eliminando los vínculos superabundantes y se considera dos estados de cargas.

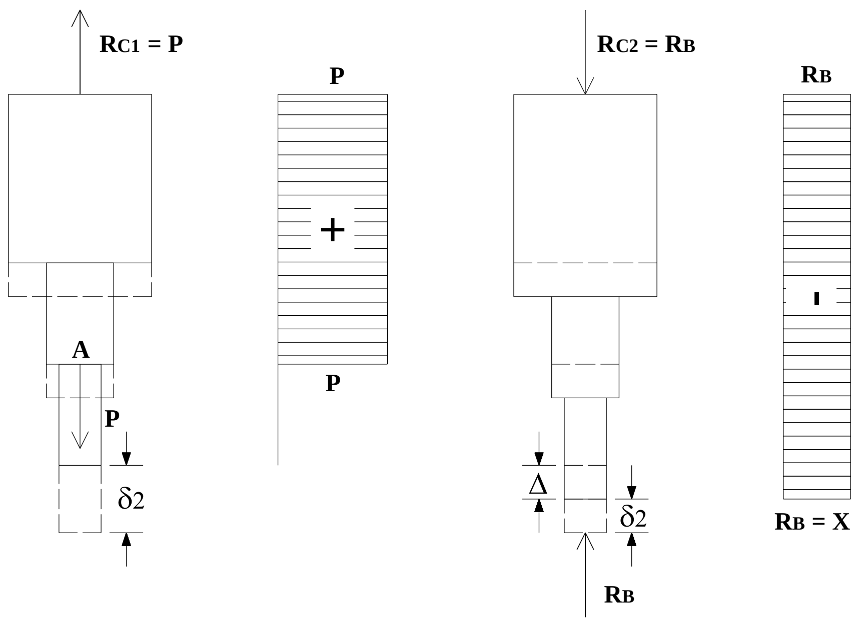
Estado 1: Se carga el sistema isostático con las cargas exteriores y se obtiene la deformación del mismo en correspondencia con el vínculo eliminado (δ_1).

Estado 2: Se carga el sistema isostático con la reacción hiperestática que corresponde al vínculo eliminado, y se determina la deformación del sistema en correspondencia con el vínculo eliminado (δ_2).

Luego se plantea la ecuación de deformación en correspondencia con el vínculo eliminado.

1.3-Ecuación de deformación

Estado 1 N Estado 2 N



En este caso; en correspondencia con el apoyo eliminado (apoyo B) existe un error de montaje, de modo que la diferencia entre δ_1 y δ_2 debe cubrir este error. Entonces :

$\boxed{\delta_1 + \delta_2 = \Delta}$ Ecuación de deformación (2)

1.4-Resolución del sistema

Los desplazamientos δ los calculamos por la ley de Hooke, como: $\delta = \dfrac{N \times l}{E \times \Omega}$

Estado (1)

$$\delta_1 = \frac{P}{E}\left(\frac{l_1}{\Omega_1} + \frac{l_2}{\Omega_2}\right)$$ El tramo (3) no sufre deformaciones por esfuerzos normales pues N = 0

Estado (2)

$$\delta_2 = \frac{x}{E}\left(\frac{l_1}{\Omega_1} + \frac{l_2}{\Omega_2} + \frac{l_3}{\Omega_3}\right)$$ Donde x es la incógnita hiperestática.

Aplicando la ecuación (2): Se considera (+) los desplazamientos hacia abajo y (-) los desplazamientos hacia arriba.

De (2)$\rightarrow \delta_1 + \delta_2 = \Delta$

$$\rightarrow \frac{P}{E}\left(\frac{l_1}{\Omega_1} + \frac{l_2}{\Omega_2}\right) - \frac{x}{E}\left(\frac{l_1}{\Omega_1} + \frac{l_2}{\Omega_2} + \frac{l_3}{\Omega_3}\right) = \Delta$$

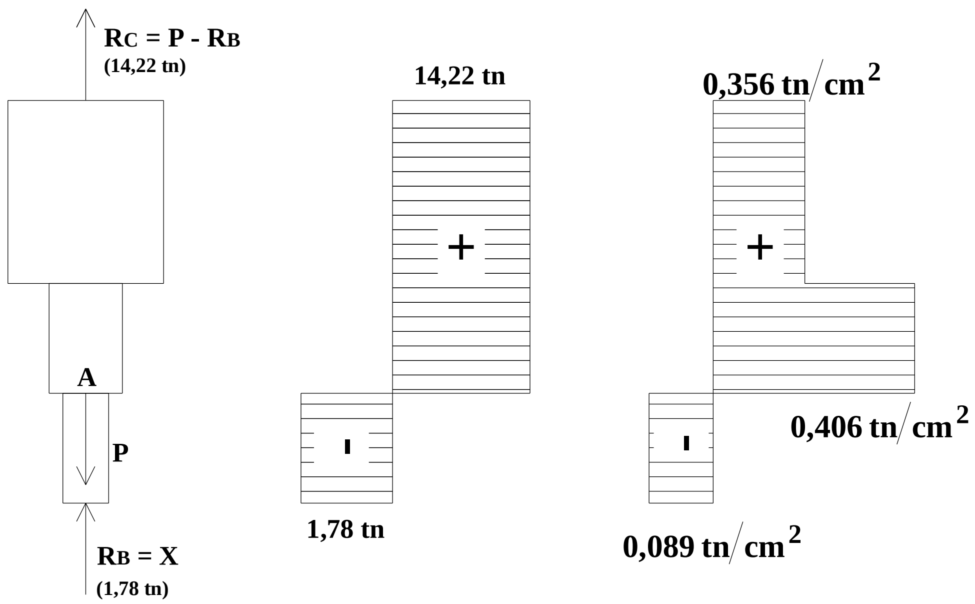
$$\rightarrow P\left(\frac{160}{40} + \frac{70}{35}\right) - x\left(\frac{160}{40} + \frac{70}{35} + \frac{60}{20}\right) = \Delta.E$$

$$\rightarrow 6 \times P\,(cm^{-1}) - 9\,x\,(cm^{-1}) = \Delta \times E$$

$$\rightarrow x = \frac{6P - \Delta \times E}{9} = \frac{6\,(cm^{-1}) \times 16\,tn - 0{,}8\,cm \times 100\,{}^{tn}\!/_{cm^2}}{9\,(cm^{-1})} = 1.78tn \rightarrow x = 1{,}78\,tn$$

Luego: $R_B = x = 1{,}78$ tn
De (1): $R_C = P - R_B = (16 - 1{,}78)$ tn = 14,22 tn

2 - Diagrama de solicitaciones



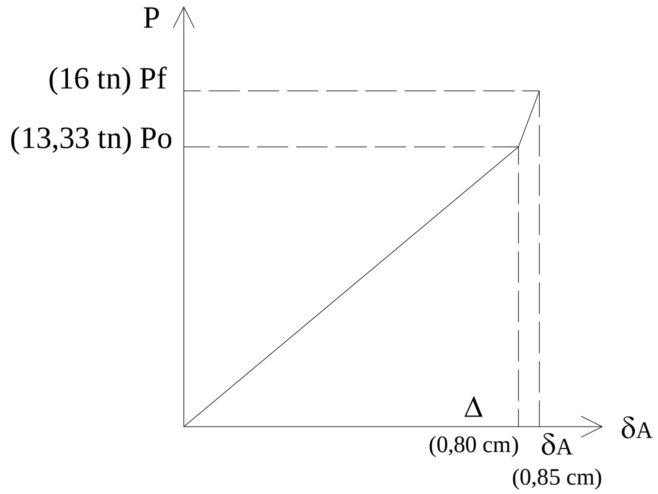
$$\sigma_3 = \frac{14{,}22\ \text{tn}}{40\ \text{cm}^2} = 0{,}356\frac{\text{tn}}{\text{cm}^2} \quad (+)$$

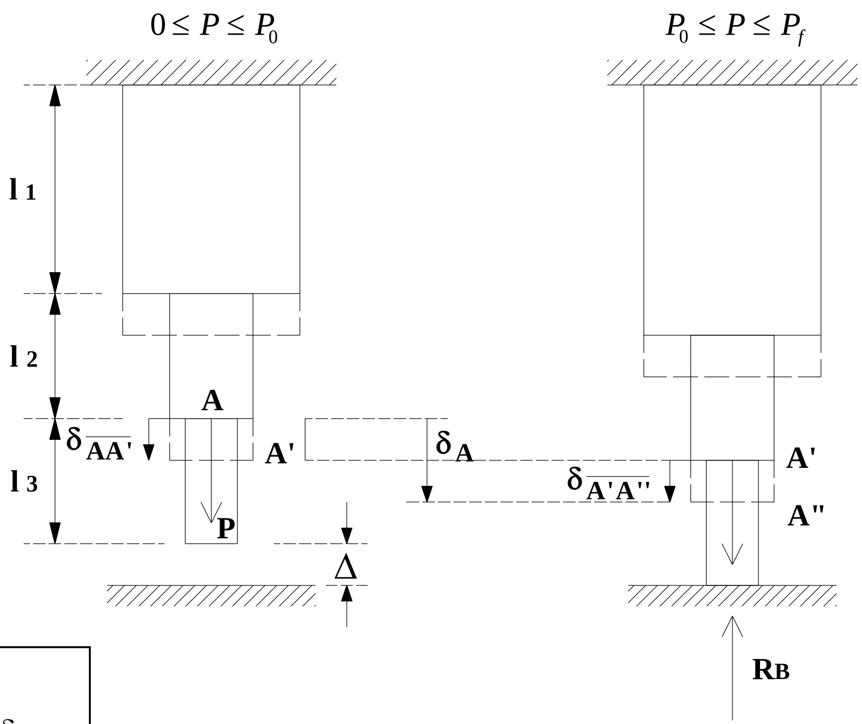
$$\sigma_2 = \frac{14{,}22\ \text{tn}}{35\ \text{cm}^2} = 0{,}406\frac{\text{tn}}{\text{cm}^2} \quad (+)$$

$$\sigma_1 = \frac{1{,}78\ \text{tn}}{20\ \text{cm}^2} = 0{,}089\frac{\text{tn}}{\text{cm}^2} \quad (-)$$

3-Diagrama de P-δ_A

La carga P aumenta gradualmente su magnitud hasta alcanzar un valor P_0, tal que en A produce un desplazamiento Δ, que cubre el error de montaje, deformándose libremente el sistema.
Cubierto el error de montaje, un aumento en la carga P genera la reacción del apoyo B (R_B), y el sistema comienza a deformarse condicionado por el vínculo. Hasta alcanzar el valor de P_f para el cual se tendría en A un desplazamiento total δ_A.





$$\delta_{\overline{AA'}} = \Delta$$
$$\delta_A = \delta_{\overline{AA'}} + \delta_{\overline{A'A''}}$$

Calculamos los valores del gráfico

$$\Delta = \frac{P_0}{E}\left(\frac{l_1}{\Omega_1} + \frac{l_2}{\Omega_2}\right) \rightarrow P_0 = \frac{\Delta \times E}{\left(l_1/\Omega_1 + l_2/\Omega_2\right)} = \frac{0{,}8\,\text{cm} \times 100\,\text{tn}/\text{cm}^2}{\left(160/40 + 70/35\right)} =$$

$$\rightarrow P_0 = 13{,}33\,\text{tn}$$

$$\delta_A = \frac{(P - R_B)}{E}\left(\frac{l_1}{\Omega_2} + \frac{l_2}{\Omega_2}\right) = \frac{14{,}22\,\text{tn}}{100\,\text{tn}/\text{cm}^2}\left(\frac{160}{40} + \frac{70}{35}\right) = 0{,}85\,\text{cm}$$

T.P. N^0 2.7:

Para el siguiente sistema se pide:

a) Dimensionar las barras con un coeficiente de seguridad υ=2

b) Determinar el descenso del punto de aplicación de la carga P.

c) Idem b) aplicando energía de deformación.

Datos:

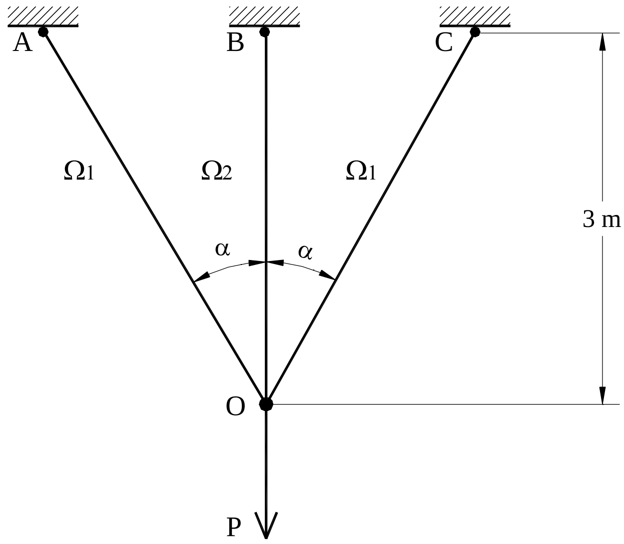
σ_{fl} = 2,4 tn/cm^2

E_1 = 1,2 E_2 = 2400 tn/cm^2

P = 5 tn

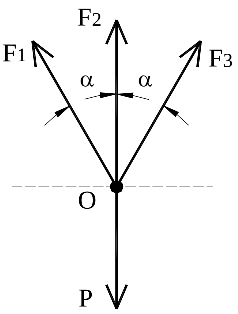
α = 30°

Ω_2 = 1,5 Ω_1



1 - Determinación de los esfuerzos en las barras

D.C.L



a) Ecuación de la Estática

$$\sum F_H = 0 \rightarrow F_1 \times \text{sen}\alpha - F_3 \times \text{sen}\alpha = 0$$

$$\rightarrow F_1 = F_3 \ \ (\text{simetria})$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow 2\,F_1 \times \cos\alpha + F_2 - P = 0$$

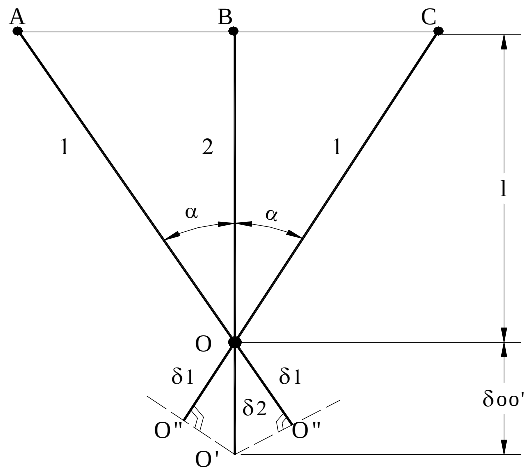
$$\rightarrow 2\,F_1 \times \cos\alpha + F_2 = P \quad (1)$$

Como puede observarse el sistema resulta hiperestático de 1er orden, porque solo se cuenta con una ecuación de la estática independiente, y se tiene dos incógnitas: $F_1 = F_3$ y F_2

Entonces resulta necesario plantear una ecuación de deformación.

b) Ecuación de deformación

Debemos determinar la configuración de la estructura y encontrar una relación entre las deformaciones de las barras. Como el sistema es simétrico, el desplazamiento que experimento el punto O ($\delta_{\overline{00'}}$) será vertical.



Para determinar la configuración deformada, se considera inicialmente que las barras están separadas. Luego se supone que se deforma la barra 1 una cantidad δ_1(en dirección de la barra) y luego gira alrededor del punto A, tal que describe un arco con centro en A y radio $\overline{AO''}$. Como los desplazamientos son pequeños, el arco puede reemplazarse por una línea recta que pase por O" y sea perpendicular al eje de la barra $\overline{AO}$. La localización final del nudo estará sobre algún punto de la línea $\overline{O'O''}$.
Ahora suponemos que se deforma la barra 2,una cantidad δ_2 (en la dirección de la barra) en la dirección $\overline{BO'}$.
La intersección entre $\overline{O''O'}$ y $\overline{BO'}$ determinará la posición final del nudo O. Así $\delta\overline{oo'}$ resulta vertical.
Planteamos la ecuación de deformación intentando vincular la deformación de las barras entre sí.
Podemos escribir que:

$$\delta\overline{oo'} = \frac{\delta_1}{\cos\alpha} \qquad \text{y} \qquad \delta\overline{oo'} = \delta_2$$

Luego $\dfrac{\delta_1}{\cos\alpha} = \delta_2$

c) <u>Resolución del sistema</u> : Para determinar los desplazamientos en las barras usaremos la ley de Hooke.

$$\delta = \frac{N \times l}{\Omega \times E} \quad \text{así que;} \quad \delta_1 = \frac{F_1 \times l_1}{\Omega_1 \times E_1} \quad \text{y} \quad \delta_2 = \frac{F_{2.} \times l_2}{\Omega_2 \times E_2}$$

reemplazando en (2):

$$\frac{F_1 \times l_1}{\Omega_1 \times E_1} \times \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{F_2 \times l_2}{\Omega_2 \times E_2}$$

siendo : $l_1 = \dfrac{l_2}{\cos\alpha}$; $E_1 = 1{,}2 \times E_2$; $\Omega_1 = \dfrac{\Omega_2}{1{,}5}$

resulta :

$$\frac{F_1 \times l_2}{1{,}2 \times E_2 \times \dfrac{\Omega_2}{1{,}5} \times \cos^2\alpha} = \frac{F_2 \times l_2}{E_2 \times \Omega_2}$$

==> $$\frac{1{,}5}{1{,}2} \times \frac{F_1 \times l_2}{E_2 \times \Omega_2} \times \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{F_2 \times l_2}{E_2 \times \Omega_2} \qquad \alpha = 30°$$

==> $$F_1 = 0{,}6 \times F_2 \qquad (3)$$

reemplazando en (1):

$$2\,(0{,}6 \times F_2) \times \cos\alpha + F_2 = P$$

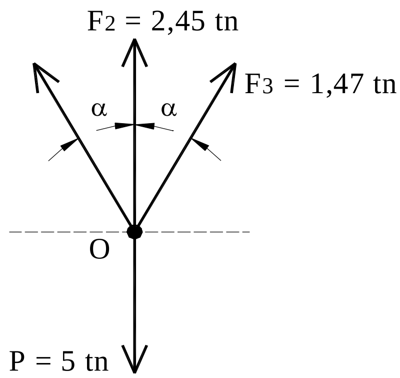
==> $$(1 + 1{,}2 \times \cos\alpha) \times F_2 = P \implies F_2 = \frac{P}{1 + 1{,}2 \times \cos\alpha}$$

==> $$F_2 = \frac{5t}{1 + 1{,}2 \times \cos 30°} = 2{,}45\ t$$

reemplazando en (3): $F_1 = 0{,}60 \times 2{,}45\ t = 1{,}47\ t$

Entonces podemos dibujar el Diagrama de Cuerpo Libre:

D.C.L :



2. Dimensionamiento de las barras

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{fe}}{\nu} = \frac{2{,}4t / cm^2}{2} = 1{,}2\ t / cm^2$$

debe verificarse que $\sigma \leq \sigma_{adm}$

a)Barra 1

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{\Omega_1} \leq \sigma_{adm} \implies \Omega_1 \geq \frac{F_1}{\sigma_{adm}} = \frac{1{,}47\ t}{1{,}2t / cm^2} = 1{,}225\ cm^2$$

$$\text{p/sección circular : } \Omega_1 = \frac{\pi \times \phi_1^2}{4} \implies \phi_1 = \sqrt{\frac{4 \times \Omega_1}{\pi}} = 1{,}25\ cm$$

Adopto : $\boxed{\phi_1\ 14\ mm \implies \Omega_1 = 1{,}54\ cm^2}$

b)Barra 2

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{\Omega_2} \leq \sigma_{adm} \implies \Omega_2 \geq \frac{F_2}{\sigma_{adm}} = \frac{2{,}45\ t}{1{,}2\ t / cm^2} = 2{,}04\ cm^2$$

$$\text{p/sección circular : } \Omega_2 = \frac{\pi \times \phi_2^2}{4} \implies \phi_2 = \sqrt{\frac{4 \times \Omega_2}{\pi}} = 1{,}61\ cm$$

Adopto : $\boxed{\phi_2\ 16\ mm \implies \Omega_2 = 2{,}01\ cm^2}$

3.- Descenso del punto de aplicación de la carga

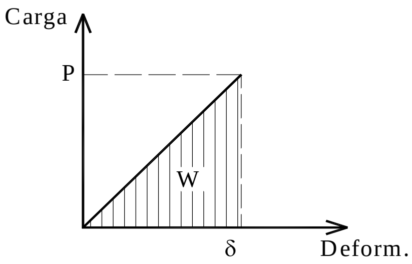
Hemos determinado que con el descenso del punto de aplicación de la carga resulta $\delta\overline{oo'}$

$$\delta\overline{oo'} = \delta_2 = \frac{F_2 \times l_2}{\Omega_2 \times E_2} = \frac{2{,}45\ t \times 300\ cm}{2{,}01\ cm^2 \times 2000t / cm^2} = 0{,}183\ cm$$

4.- Determinación de $\delta_{\overline{00'}}$ por energía de deformación

Durante la aplicación de la carga P, el sistema se deforma y almacena una cierta energía potencial que, si el sistema está trabajando dentro del campo elástico, al cesar la aplicación de la carga le permite al

sistema recuperar su forma inicial. Esta energía acumulada en el sistema se denomina energía interna de deformación U.
Si las cargas son aplicadas estáticamente, el trabajo realizado por las cargas exteriores W es igual a la energía interna de deformación U.



Dentro del campo elástico lineal resulta:

$$W = \int_0^P P\,d\delta = \frac{P \times \delta}{2}$$

que representa el área bajo la curva P- δ.
Donde δ es el desplazamiento en la dirección de la carga P.

Así, la energía acumulada en el sistema por esfuerzo normal resulta:

$$U = W = \frac{P \times \delta}{2} = \frac{1}{2}\frac{\Omega \times E}{l}\delta^2 = \frac{1}{2} \times \frac{l}{\Omega \times E} \times P^2$$

Por Hooke: $\boxed{\delta = \frac{\sigma \times l}{E} \implies U = \frac{\sigma^2 \times \Omega \times l}{2E}}$

En un sistema de barras:

$$\frac{P \times \delta}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i{}^2 \times \Omega_i \times l_i}{2 \times E_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i{}^2 \times l_i}{2 \times \Omega_i \times E_i}$$

Para el ejercicio:

$$\frac{P \times \delta_{\overline{oo'}}}{2} = 2 \times \frac{F_1{}^2 \times l_1}{2 \times E_1 \times \Omega_1} + \frac{F_2{}^2 \times l_2}{2 \times E_2 \times \Omega_2}$$

$$\implies \qquad \delta_{\overline{oo'}} = \left(2 \times \frac{F_1{}^2 \times l_1}{E_1 \times \Omega_1} + \frac{F_2{}^2 \times l_2}{E_2 \times \Omega_2}\right) \times \frac{1}{P}$$

$$\implies \qquad \delta_{\overline{oo'}} = \left(2 \times \frac{(1{,}47\ t)^2 \times (300\ cm / \cos 30°)}{1{,}54\ cm^2 \times 2400\ t/cm^2} + \frac{(2{,}45\ t)^2 \times 300\ cm}{2{,}01\ cm^2 \times 2000\ t/cm^2}\right) \times \frac{1}{5\ t}$$

$$\implies \qquad \delta_{\overline{oo'}} = \frac{0{,}853\ tcm}{5\ t} = 0{,}17\ cm$$

T.P. N° 2.8:

Determinar las tensiones que se producen en las barras una vez superado el error de montaje (Δ), aplicando el concepto de energía de deformación.

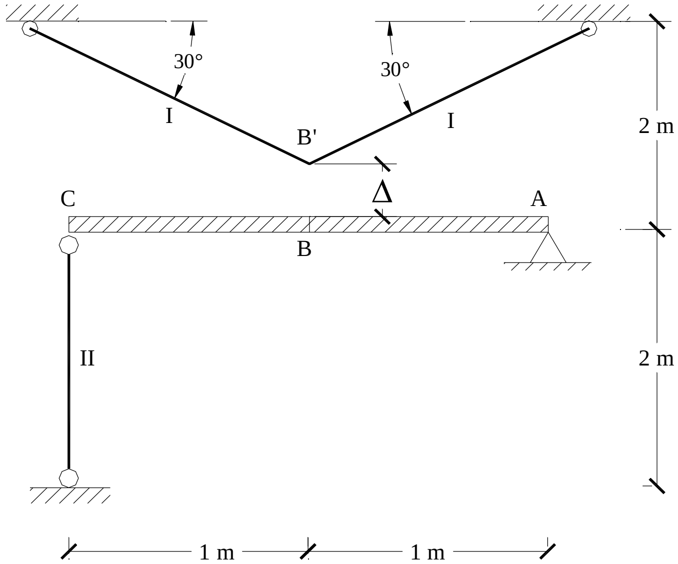
Datos:

$E = 2000\ t/cm^2$

Barra AC = Rígida

$\Omega_I = \Omega_{II} = 2\ cm^2$

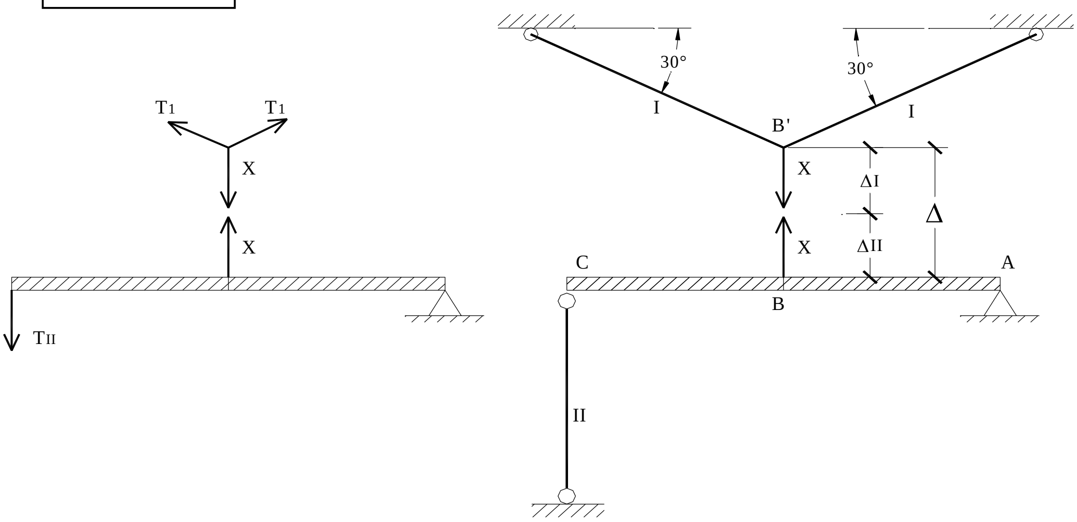
$\Delta = 0{,}8\ cm$



1– Error de montaje

Para superar el error de montaje, las barras (I) deben "engancharse" en la barra AC. Esto genera una fuerza X que tiende a desplazar hacia abajo el punto de unión de las barras I (ΔI) y por acción y reacción, se introduce la misma fuerza X en la barra AC que tiende a desplazarse hacia arriba (ΔII).
Los desplazamientos ΔI y ΔII deben cubrir el error de montaje (Δ), tal que:

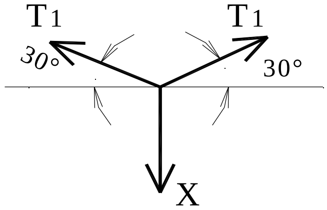
$\boxed{\Delta = \Delta I + \Delta II}$ (1) Ec. Deformación.



2-Análisis de los sistemas

La fuerza x introducida para superar el error de montaje produce tensiones dentro del sistema:
Sistema I :

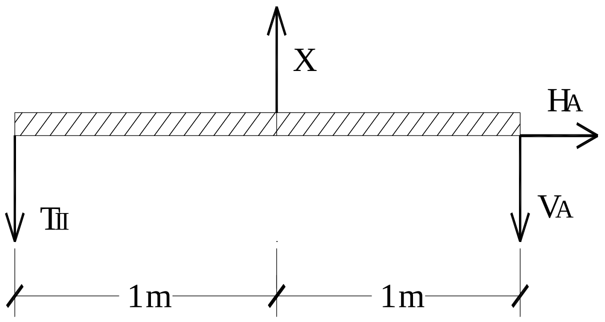
D.C.L.



$$\sum F_V = 0 \rightarrow 2\,T_1 \times \text{sen}\,30° - x = 0$$

$$\rightarrow T_1 = \frac{x}{2 \times \text{sen}30°} \quad (2)$$

Sistema II
D.C.L.



$$\sum M_A = 0 \rightarrow x \times 1\,m - T_2 \times 2\,m = 0$$

$$\rightarrow T_2 = \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow H_A = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow T_2 + V_A = x \quad (5)$$

Luego conociendo el valor de X (incógnita hiperestática) se obtienen los esfuerzos en el sistema. El valor de X puede obtenerse por energía de deformación o bien desarrollando la ecuación de deformación (1).

3 - Energía de deformación

La fuerza X genera un trabajo externo W a lo largo del error de montaje Δ, y se genera internamente en el sistema una energía de deformación U, que es función de las barras que se deforman (I y II). La barra AC por ser rígida se considera que no se deforma, luego:

$$W = U \text{ con: } \quad W = \frac{x \times \Delta}{2}$$

$$\text{y} \quad U = \frac{\sum T_i^2 \times l_i}{2\,E_i \times \Omega_i} \quad \rightarrow \quad U = 2\left(\frac{T_1^2 \times l_1}{2\,E \times \Omega}\right) + \frac{T_2^2 \times l_2}{2\,E \times \Omega}$$

Siendo :

$$T_1 = \frac{x}{2.\text{sen}30°}$$

$$l_1 = \frac{a}{\text{sen}30°}$$

$$T_2 = \frac{x}{2}$$

$$l_2 = a$$

Luego: W = U

$$\frac{x \times \Delta}{2} = 2\left[\left(\frac{1}{2\,E \times \Omega}\right) \times \frac{x^2}{4\,\text{sen}^2 30} \times \frac{a}{\text{sen}30°}\right] + \left(\frac{1}{2\,E \times \Omega}\right) \times \left(\frac{x^2}{4} \times a\right)$$

$$\frac{x \times \Delta}{2} = \frac{x^2 \times a}{2\,E \times \Omega} \times \left(\frac{2}{4\,\text{sen}^2 30°} + \frac{1}{4}\right)$$

$$x = \frac{\Delta \times E \times \Omega}{(4{,}25\,a)} \quad (6)$$

$$\rightarrow x = \frac{0{,}8\,\text{cm} \times 2000\,\text{tn/cm}^2 \times 2\,\text{cm}^2}{(4{,}25 \times 200\,\text{cm})} = 3{,}76\,\text{tn}$$

4 - Esfuerzos de las barras

$$\text{De (2)} \Rightarrow T_1 = \frac{x}{2\,\text{sen}\,30°} = \frac{3{,}76\,\text{tn}}{2\,\text{sen}\,30°} = 3{,}76\,\text{tn}$$

$$\text{De (3)} \Rightarrow T_2 = \frac{x}{2} = \frac{3{,}76\,\text{tn}}{2} = 1{,}88\,\text{tn}$$

De (5) ⇒ $V_A = x - T_2 = 1{,}88$ tn

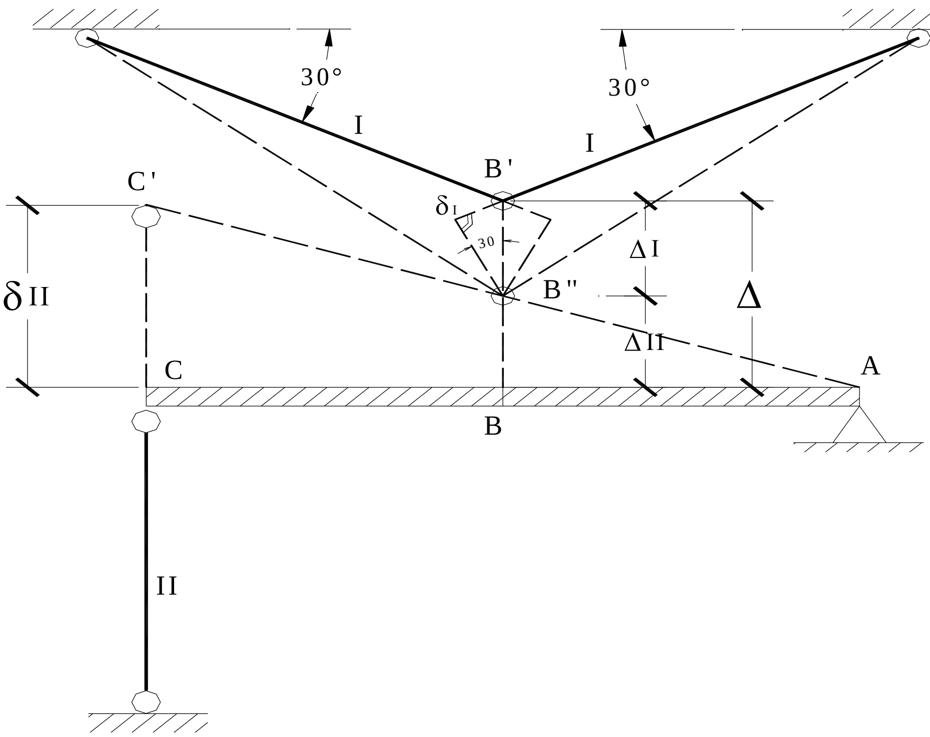
Luego:

$$\sigma_I = \frac{T_1}{\Omega} = \frac{3{,}76\,\text{tn}}{2\,\text{cm}^2} = 1{,}88\,\text{tn/cm}^2$$

$$\sigma_{II} = \frac{T_2}{\Omega} = \frac{1{,}88\,\text{tn}}{2\,\text{cm}^2} = 0{,}94\,\text{tn/cm}^2$$

5 - Determinación de X desarrollando la ecuación de deformación .

La configuración deformada del sistema es la que se muestra a continuación.
La barra AC rígida no se deforma; solo rota respecto en la rotula en A. Eso produce un alargamiento en la barra II.



De la configuración deformada, se observa que: $\boxed{\Delta = \Delta_I + \Delta_{II} \quad (1)}$

Con:

$$\Delta_I = \frac{\delta_I}{sen30°}; \quad \delta_I = \frac{T_1 \times l_1}{E \times \Omega} \rightarrow \quad \Delta_I = \frac{T_1 \times l_1}{E \times \Omega \times sen30°}$$

$$\Delta_{II} = \frac{\delta_{II}}{2}; \delta_{II} = \frac{T_2 \times l_2}{E \times \Omega} \rightarrow \Delta_{II} = \frac{T_2 \times l_2}{2\,E \times \Omega}$$

Luego :

$$\Delta = \frac{T_1 \times l_1}{E \times \Omega \times sen30°} + \frac{T_2 \times l_2}{2\,E \times \Omega}$$

con :

$$T_1 = \frac{x}{2\,sen30°}; \; l_1 = \frac{a}{sen\,30°}; \; T_2 = \frac{x}{2}; l_2 = a$$

$$\Delta = \frac{a}{2\,sen^3 30°} \times \frac{x}{E \times \Omega} + \frac{a}{4} \times \frac{x}{E \times \Omega}$$

$$\Delta = \frac{x \times a}{E \times \Omega} \times \left(\frac{1}{2\,sen^3 30°} + \frac{1}{4} \right)$$

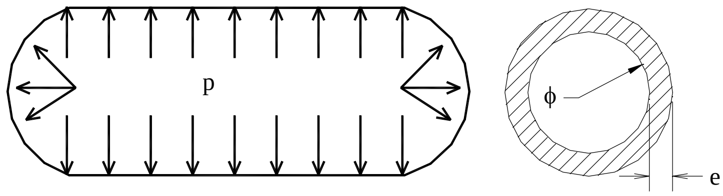
$$\Delta = \frac{x \times a}{E \times \Omega} \times 4{,}25 \rightarrow x = \frac{\Delta \times E \times \Omega}{(4{,}25\,a)} \quad \text{Idem ec. (6) anterior}$$

$$\rightarrow x = \frac{0{,}8\,cm \times 2000\,{}^{tn}\!/\!_{cm^2} \times 2\,cm^2}{(4{,}25 \times 200\,cm)} = 3{,}76\,tn$$

T.P. N° 2.9:

A los efectos de su transporte y depósito, el gas se almacena en cilindros cerrados por extremos semi-esféricos fabricados de acero, con un espesor e=1,2cm.
Calcular las tensiones a la que esta sometido el depósito si la presión interior es de $p=18Kg/cm^2$.

Datos:
ϕ = 85 cm
e = 1,2 cm
p = 18 kg/cm^2

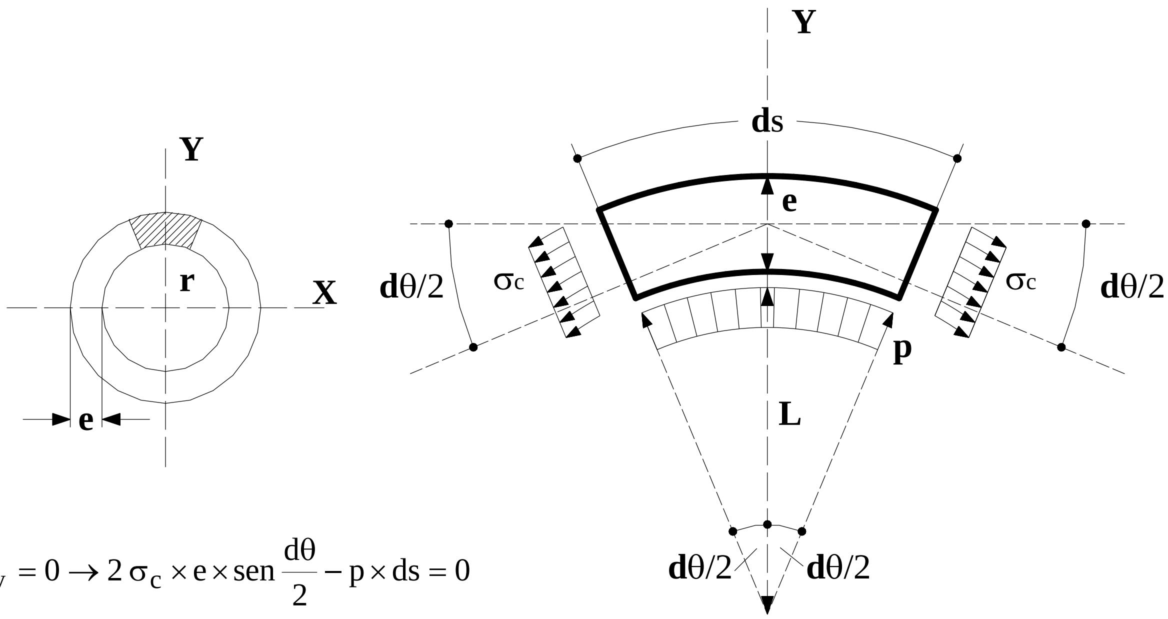


El cilindro constituye una envolvente cilíndrica de pequeño espesor, donde se verifica que:

$$r = \frac{\phi}{2} = \frac{85\,cm}{2} = 42{,}5\,cm$$

$$\frac{r}{e} = \frac{42{,}5\,cm}{1{,}2\,cm} = 35{,}4 > 10$$

Debido a la presión del interior p, sobre las paredes del cilindro se generan tensiones circunferenciales σ_c (con dirección tangente a la circunferencia) y tensiones radiales σ_r (en la dirección del radio), pero debido al pequeño espesor de las paredes éstas pueden considerarse despreciables σ_r=0.
Aislando un elemento diferencial.



$$\sum F_y = 0 \rightarrow 2\,\sigma_c \times e \times sen\frac{d\theta}{2} - p \times ds = 0$$

donde $\quad sen\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2};\;\; ds = r \times d\theta$

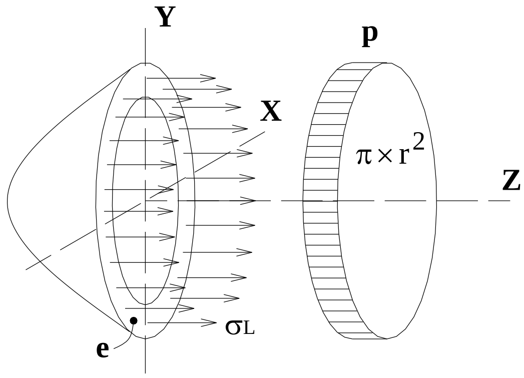
$$\rightarrow\; 2\,\sigma_C \times e \times L \times \frac{d\theta}{2} - p \times r \times d\theta = 0$$

$$\rightarrow \sigma_C = \frac{p \times r}{e};\;\;\; \sigma_r = 0$$

Como el cilindro tiene cierres en los extremos, la presión del interior actuando sobre los mismos, origina en las paredes del cilindro tensiones longitudinales σ_L (en la dirección del eje longitudinal del cilindro), uniformemente distribuidas en el área de la sección transversal.

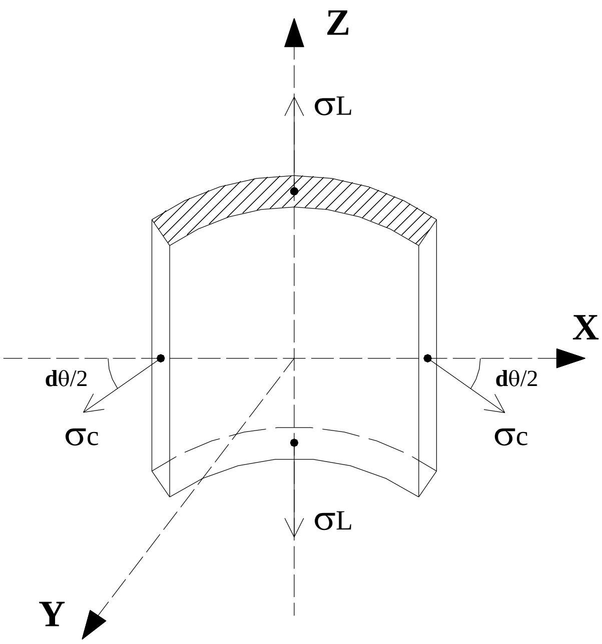
$$\sum F_Z = 0 \rightarrow p \times \pi \times r^2 - \sigma_L \times (2\,\pi \times r) \times e = 0$$

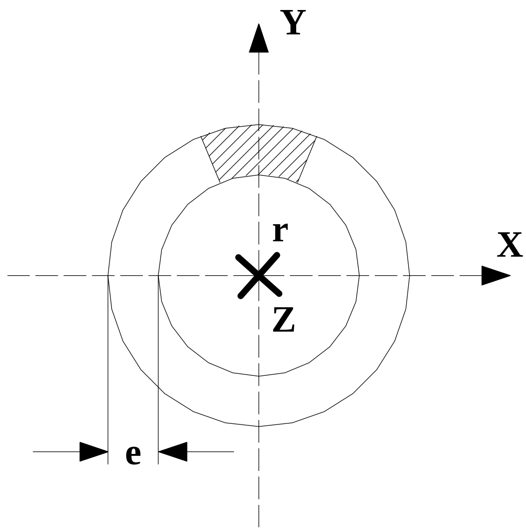
$$\rightarrow \sigma_L = \frac{p \times r}{2\,e} = \frac{\sigma_C}{2}$$



Entonces, en un elemento de la pared del cilindro; se tendrá:

$$\begin{cases} \sigma_L = \dfrac{p \times r}{2\,e} \\ \sigma_C = \dfrac{p \times r}{e} \end{cases} \quad \text{Remplazando valores} \quad \begin{cases} \sigma_L = \dfrac{18\,kg/cm^2 \times 42{,}5\,cm}{2 \times 1{,}2\,cm} = 318{,}75\,kg/cm^2 \\ \sigma_C = \dfrac{18\,kg/cm^2 \times 42{,}5\,cm}{1{,}2\,cm} = 637{,}5\,kg/cm^2 \end{cases}$$





T.P. N° 2.10:

La figura muestra una junta constructiva entre dos losas de H°, rellena con un epoxi flexible que se adhiere al H°. La junta tiene dimensiones h × L × l. Bajo la acción de esfuerzos cortantes Q, las losas se desplazan una distancia (Δ).

Determinar la deformación angular media γ_{media} en el epoxi; determinar la magnitud de la fuerza Q, y calcular la energía de deformación del sistema.

Datos:

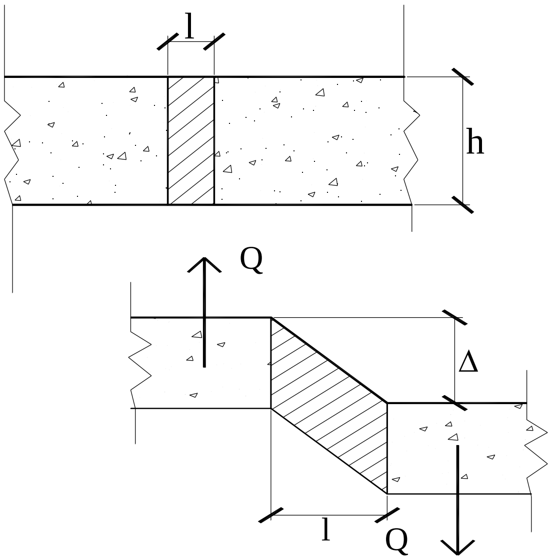
h = 10 cm

L = 100 cm

l = 1,25 cm

Δ = 0,005 cm

G = 9,8 tn/cm^2



1-Deformación angular media

$$\gamma_{med.} = \frac{\Delta}{l} = \frac{0{,}005\,\text{cm}}{1{,}25\,\text{cm}} = 0{,}004$$

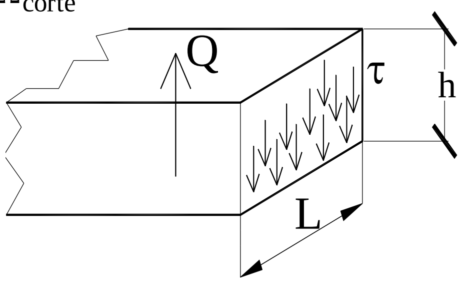
2-Esfuerzo de corte Q

$$\text{Este esfuerzo cortante solicito a la resina epoxi, tal que: } \tau = \frac{Q}{\Omega_{corte}} = G \times \gamma_{medio}$$

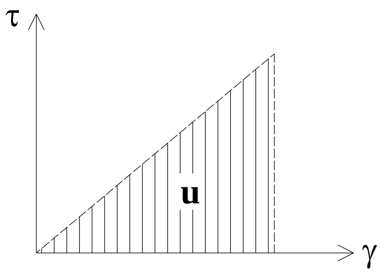
$$\rightarrow Q = (G \times \gamma_{medio}) \times \Omega_{corte};\ \Omega_{corte} = h \times L$$

$$\rightarrow Q = \left(9{,}8\,\frac{\text{tn}}{\text{cm}^2} \times 0{,}004\right) \times (10\text{cm} \times 100\text{cm})$$

$$\rightarrow Q = 39{,}2\ \text{tn} \rightarrow \tau = \frac{Q}{\Omega} = 0{,}039\ \text{tn}/\text{cm}^2$$



3-Energia de deformación



$$u = \frac{1}{2} \times \tau \times \gamma = \frac{1}{2} \times G \times \gamma^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\tau^2}{G}$$

$$U = u \times \text{vol.} = \left(\frac{1}{2} \times \tau \times \gamma\right) \times \Omega \times l = \frac{1}{2} \times (\tau \times \Omega) \times (\gamma \times l) = \frac{1}{2} \times Q \times \Delta$$

$$U = u \times \text{vol.} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{\tau^2}{G}\right) \times \Omega \times l = \frac{1}{2} \times \frac{Q^2}{\Omega^2} \times \frac{\Omega \times l}{G} = \frac{1}{2} \times \frac{Q^2 \times l}{\Omega \times G}$$

$$U = u \times \text{vol.} = \left(\frac{1}{2} \times G \times \gamma^2\right) \times \Omega \times l = \frac{1}{2} \times G \times \frac{\Delta^2}{l^2} \times \Omega \times l = \frac{1}{2} \times \frac{G \times \Delta^2 \times \Omega}{l}$$

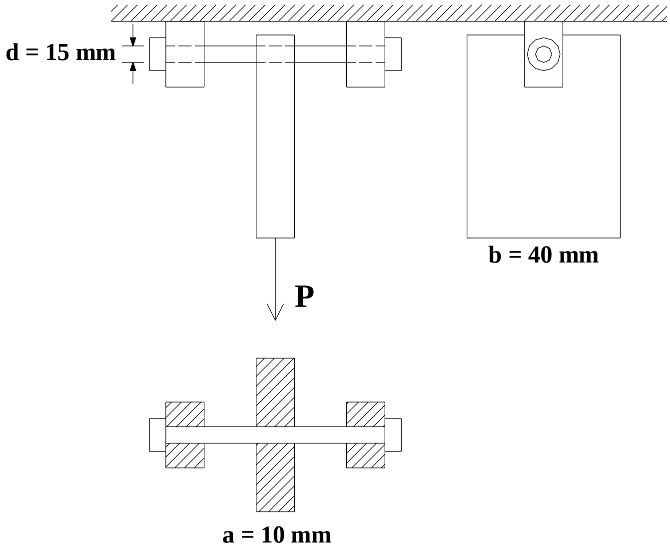
Luego:

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{Q^2 \times l}{\Omega \times G} = \frac{1}{2} \times \frac{(39{,}2\ \text{tn})^2 \times (1{,}25\ \text{cm})}{(10 \times 100)\,\text{cm}^2 \times 9{,}8\ \text{tn}/\text{cm}^2} = 0{,}098\ \text{tncm} \qquad \boxed{U = 0{,}098\ \text{tncm}}$$

T.P. N° 2.11:

Una barra de acero de sección transversal rectangular (10 × 40 mm) soporta una fuerza de tracción P y esta articulada a un soporte por medio de un perno redondo de 15mm de diámetro. Determinar el valor máximo permisible de la carga P.

Datos:
σ_{adm} = 1200 kg/cm^2
τ_{adm} = 600 kg/cm^2
a = 1 cm
b = 4 cm
d = 1,5 cm



1-Carga admisible teniendo en cuenta la resistencia de la barra rectangular

La tensión de tracción que se origina en la barra rectangular debido a P, debe acumularse sobre el área neta de la sección transversal (es decir descontando el área del perno).

$$\Omega_{neta} = (b - d) \times a = (4 - 1{,}5) = 2{,}5\,cm^2$$

Luego, la carga admisible basada en la tensión de la barra es:

$$\sigma = \frac{P}{\Omega_{neta}} \leq \sigma_{adm} \;\rightarrow\; P_{1adm} \leq \sigma_{adm} \times \Omega_{neta}$$

$$\rightarrow\; P_{1adm} \leq 1{,}2\,tn/cm^2 \times 2{,}5\,cm^2$$

$$\rightarrow\; P_{1adm} \leq 3\,tn$$

2-Carga admisible teniendo en cuenta la resistencia del perno

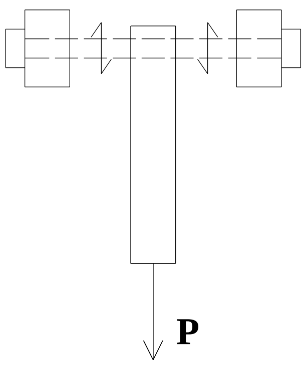
El perno tiende a cortarse en dos secciones de corte, cada una de las cuales sometidas a un esfuerzo cortante T = P/2. Entonces:

$$\tau = \frac{P}{\Omega_{perno}} = \frac{P \times 4}{2\,\pi \times d^2} \leq \tau_{adm}$$

$$\rightarrow P_{2adm} \leq 2\,\tau_{adm}\left(\frac{\pi \times d^2}{4}\right)$$

$$\rightarrow P_{2adm} \leq 2 \times 0{,}6\,tn/cm^2 \times \frac{\pi \times (1{,}5\,cm)^2}{4} =$$

$$\rightarrow P_{2adm} \leq 2{,}12\,tn$$



3- Carga P admisible

Comparando ambos valores de P_{adm}, resulta determinante el esfuerzo de corte en el perno.
Entonces:

$$\boxed{P_{adm} = 2{,}12\,tn}$$

T.P. N° 2.12:

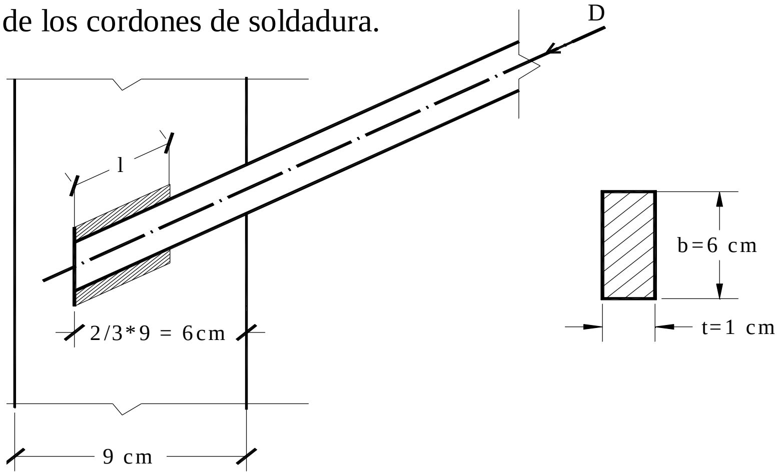
Determinar la longitud necesaria de los cordones de soldadura.

Datos:

$\tau_{adm\ sold.} = 900\ Kg/cm^2$

D = 3tn

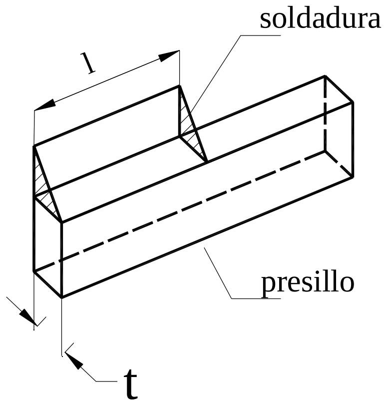
Presilla 1 x 6 cm



1- Dimensionamiento del cordón de soldadura

Para dimensionar el cordón de soldadura, se considera como el espesor del cordón (a = 0,7.t) a la altura del triángulo rectángulo inscripto, siendo t el espesor de la pieza más delgada de la unión.

Denominamos:



l = longitud del cordón

a = espesor del cordón ($a_{min.}$ = 3 mm.)

t = espesor presillo

Así, la sección de soldadura será:

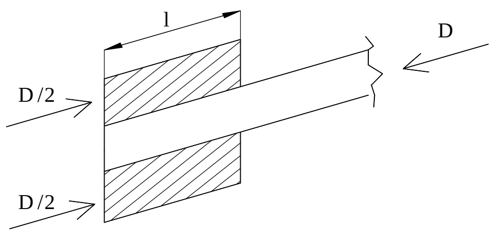
$\Omega_{sold.} = (0{,}7\ t \times l)$

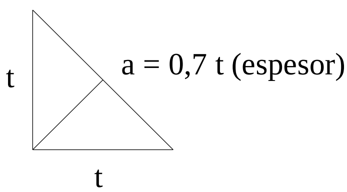
Por equilibrio de esfuerzos, cada cordón de soldadura deberá soportar un esfuerzo D/2, que originan tensiones tangenciales en el mismo.

Así:

$$\tau = \frac{D/2}{\Omega_{sold.}} \leq \tau_{admsold.}$$

$$\tau = \frac{D/2}{(0{,}7\ t \times l)} \leq \tau_{admsold.}$$





Cordón de soldadura

$$\rightarrow l \geq \frac{D/2}{(0{,}7\ t) \times \tau_{admsold}} = \frac{3tn/2}{(0{,}7 \times 1cm) \times 0{,}90\ \frac{tn}{cm^2}} = 2{,}40\ cm$$

$\rightarrow l = 2{,}40\ cm$ Longitud necesaria del cordon de soldadura